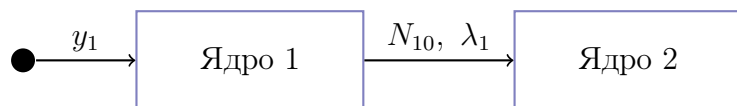


ВЫХОДЫ РЕАКЦИЙ. ОДИН И ДВА КАНАЛА ОБРАЗОВАНИЯ
ЯДРА

Москва
2013 год

1 Определение выхода реакции. Один канал образования ядра



Уравнение описывающее изменение количества радиоактивных ядер во время и после облучения имеет вид:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 + y_1$$

или

$$dN_1 = -\lambda_1 N_1 dt + y_1 dt$$

где N_1 - число радиоактивных ядер,

λ - постоянная распада,

y_1 - выход реакции. Смысл выхода - число реакций данного типа, происходящих в образце в единицу времени.

Рассмотрим изменение числа радиоактивных ядер на графике:

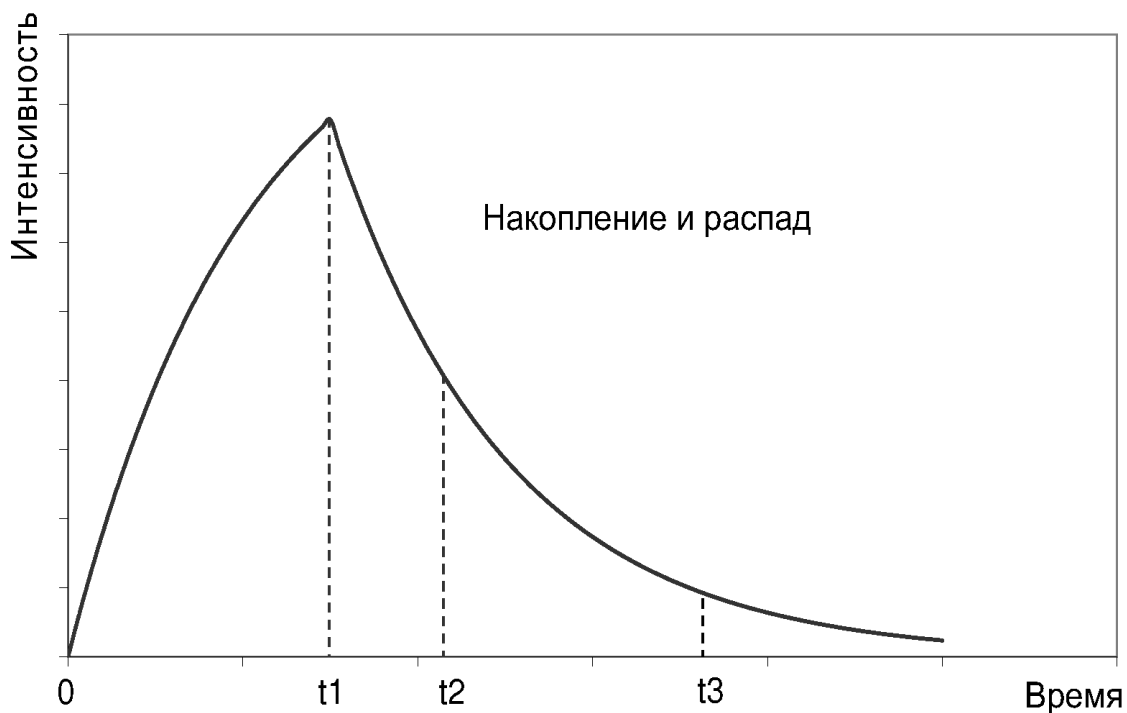


Рисунок 1. Изменение количества радиоактивных ядер в процессе облучения и после него.

На графике момент времени $t = 0$ - начало облучения, t_1 - окончание облучения, t_2 - начало измерения спектров, t_3 - окончание измерения.

В промежутке времени $0 - t_1$ происходит накопление и распад изотопов. При $t > t_1$ только распад. В промежутке $t_2 - t_3$ - происходит измерение спектров, с целью получить выход.

Измерение спектров происходит в промежутке времени $t > t_1$. Для этого случая уравнение изменения количества радиоактивных ядер примет вид:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1$$

Решение этого уравнения представляет собой просто закон радиоактивного распада:

$$N_1(t) = N_{10} \cdot e^{-\lambda_1 t}$$

Напомним, что $N_1(t)$ - количество нераспавшихся радиоактивных ядер, N_{10} - число радиоактивных ядер на момент окончания измерения (в момент времени t_1).

В гамма - активационных экспериментах измеряется число распадов радиоактивных ядер за какой - то промежуток времени (пропорционально площади пика). Допустим наше измерение происходит в промежутке времени от t_2 до t_3 . Не забудем также о том что детектор регистрирует не все гамма кванты, попавшие на него, а также то, что гамма - кванты при распаде ядер излучаются лишь с некоторой вероятностью. Поэтому введем нормировочный коэффициент k_1 . Тогда число распадов, которые мы зафиксируем на детекторе (площадь пика) будет:

$$\begin{aligned} S &= k_1 \int_{t_2-t_1}^{t_3-t_1} \lambda_1 N_1(t) = k_1 \int_{t_2-t_1}^{t_3-t_1} \lambda_1 N_{10} \cdot e^{-\lambda_1 t} = \\ &= k_1 N_{10} (e^{-\lambda_1(t_2-t_1)} - e^{-\lambda_1(t_3-t_1)}) \end{aligned}$$

$$k_1 = E_\gamma \cdot I_\gamma$$

где E_γ - эффективность регистрации гамма - кванта с определенной энергией детектором. (см. Приложение 1.)

I_γ - квантовый выход для данной гамма линии (вероятность испускания гамма - кванта с определенной энергией). Он определяется вероятностью распада на определенный уровень и вероятностью гамма - перехода при распаде. Обычно приводится в таблицах распада (см. <http://ie.lbl.gov/toi/>).

Фитируя этой функцией данные по изменению площади в процессе измерения и используя N_{10} в качестве параметра мы получим значение количества ядер на момент окончания облучения.

Если мы имеем только данные по площади пика за какой то один большой временной промежуток, то можно число ядер на момент окончания облучения просто посчитать по формуле.

$$N_{10} = \frac{S}{k_1(e^{-\lambda_1(t_2-t_1)} - e^{-\lambda_1(t_3-t_1)})}$$

Далее определим выход реакции.

Для получения выхода запишем уравнение изменения количества радиоактивных ядер при $t < t_1$:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1 + y_1$$

В общем случае это уравнение можно решить, если записать его в виде

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1(t) + f(t)$$

(см. <http://depni.sinp.msu.ru/~hatta/metodika.pdf>)

Тогда решение будет записано в виде:

$$N_1(t) = e^{-\lambda_1 t} \left(\int f(t) e^{-\lambda_1 t} dt + C_1 \right)$$

В нашем $f(t) = y_1$ - не зависит от времени. Мы считаем, что ток ускорителя во время облучения не менялся. Тогда для момента времени $t = t_1$ получим решение:

$$N_1(t_1) = e^{-\lambda_1 t_1} \left(\int_0^{t_1} y_1 e^{\lambda_1 t} dt + C \right) = N_{10}$$

Постоянная $C = 0$. Это следует из того, что до начала облучения в образце не было радиоактивных ядер 1.

$$N_{10} = e^{-\lambda_1 t_1} \cdot y_1 \cdot \frac{1}{\lambda_1} (e^{\lambda_1 t_1} - 1)$$

Тогда для выхода получим формулу:

$$y_1 = \frac{N_{10} \cdot \lambda_1}{e^{-\lambda_1 t_1} (e^{\lambda_1 t_1} - 1)} = \frac{N_{10} \cdot \lambda_1}{(1 - e^{-\lambda_1 t_1})}$$

Таким образом, для того чтобы определить выход нам сначала надо по максимальному набору спектров определить количество образовавшихся ядер на момент окончания облучения (процедура фитирования).

Строго говоря, при определении выхода нужно ввести еще некоторые поправки. В объеме образца происходит поглощение испущенных им же гамма - квантов - самопоглощение. И в зависимости от энергии гамма - квантов самопоглощение будет иметь различные значения. В этом эксперименте мы не учитываем самопоглощение, так как образец очень тонкий (напыленный уран). Учет самопоглощения можно провести, используя моделирование на GEANT4. Также нужно учесть поправку на мертвое время детектора. При измерении спектров облученного урана мертвое время детектора было порядка десятой доли процента от живого времени, такую маленькую поправку можно не рассматривать.

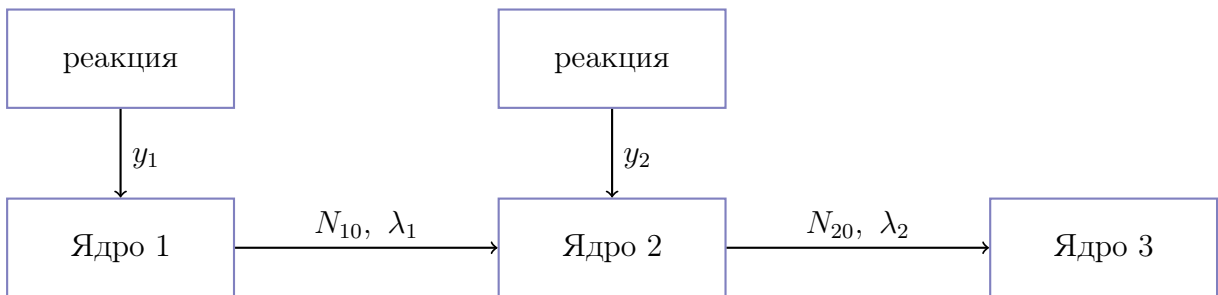
У нас имеется формула для изменения количества радиоактивных ядер после облучения и количество ядер на момент окончания облучения и формула для выхода реакции. Для последующих вычислений нам понадобится понять как изменится количество ядер во время облучения:

$$N_1(t) = e^{-\lambda_1 t} \int_0^t y_1 e^{\lambda_1 t} dt = N_{10}, \text{ при } t < t_1$$

$$N_1(t) = \frac{y_1}{\lambda_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) = N_{10} \frac{(1 - e^{-\lambda_1 t})}{(1 - e^{-\lambda_1 t_1})}$$

Соответственно в момент времени $t = 0$ число ядер $N_1(0) = 0$, а $N_1(t_1) = N_{10}$.

2 Определение выхода реакции. Два канала образования ядра



$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 + y_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 + y_2 \end{cases}$$

λ_1, λ_2 - постоянные распада,

y_1 , - выход образования ядра **1**,

y_2 , - выход образования ядра **2** в результате реакции,

N_{10}, N_{20} количество ядер **1** и **2** на момент окончания облучения.

Способ решения такого вида уравнений описан в статье, доступной по ссылке <http://depni.sinp.msu.ru/~hatta/metodika.pdf>.

Нужно записать уравнение в виде:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + f(t)$$

Тогда решение будет записано в виде:

$$N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \left(\int f(t) e^{\lambda_2 \tau} d\tau + C_2 \right)$$

Первое уравнение решено в предыдущем разделе, поэтому его решение мы приводить не будем.

Как и в случае для одного канала образования ядра разобьем эксперимент на несколько временных промежутков. В промежутке времени $0 - t_1$ происходит накопление и распад изотопов (облучение). При $t > t_1$ образец переносится на детектор и происходит измерение спектров. В промежутке $t_2 - t_3$ - происходит измерение спектров, с целью получить выход.

Измерение спектров происходит в промежутке времени $t > t_1$. Для простоты будем считать что $t_1 = 0$. Для этого случая уравнение изменения количества радиоактивных ядер примет вид:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1$$

$$N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \left(\int_0^t f(t) e^{\lambda_2 \tau} d\tau + C_2 \right) = e^{-\lambda_2 t} \left(\int_0^t \lambda_1 N_{10} e^{(\lambda_2 - \lambda_1) \tau} d\tau + C_2 \right) =$$

$$N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \cdot C_2 + e^{-\lambda_2 t} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \cdot (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1) =$$

$$= e^{-\lambda_2 t} \cdot C_2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_2 t}$$

$N_2(0) = N_{20} \implies C_2 = N_{20}$. Окончательно для изменения числа радиоактивных ядер **2** после облучения получим формулу, с помощью которой можно сразу оценить период полураспада этого ядра:

$$N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \left(N_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \right) + e^{-\lambda_1 t} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10}$$

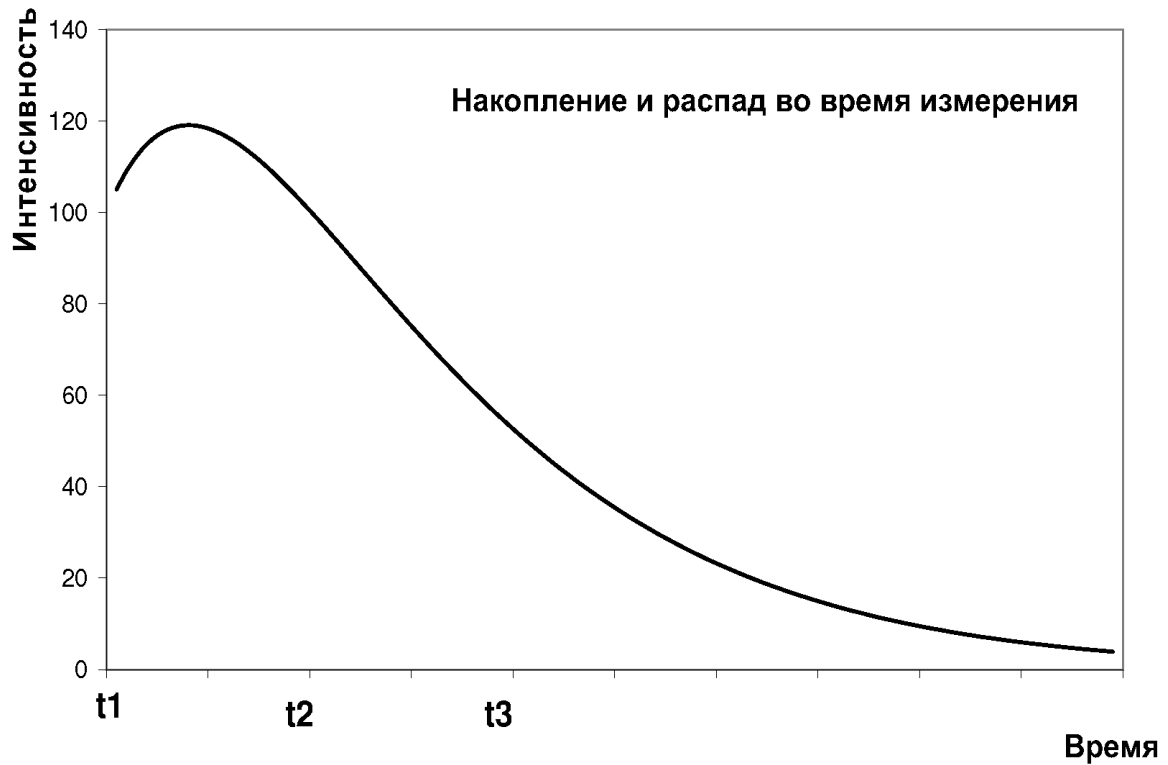


Рисунок 2. Изменение количества радиоактивных ядер в после облучения для случая двух каналов образования ядра.

Мы измеряем площадь пиков, то есть число распавшихся радиоактивных ядер за время от t_2 до t_3 . Вернемся к старым обозначениям. Здесь $t_2 - t_1$ и $t_3 - t_1$ время от начала облучения.

$$S(t_2, t_3) = k_2 \int_{t_2-t_1}^{t_3-t_1} \lambda_2 N_2(t) dt = k_2 \lambda_2 \int_{t_2-t_1}^{t_3-t_1} \left(e^{-\lambda_2 t} N_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} N_{10} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} N_{10} \right) dt =$$

$$\frac{S(t_2, t_3)}{k_2} = N_{20}(e^{-\lambda_2(t_2-t_1)} - e^{-\lambda_2(t_3-t_1)}) - \frac{N_{10}\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_2(t_2-t_1)} - e^{-\lambda_2(t_3-t_1)}) + \frac{N_{10}\lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)}(e^{-\lambda_1(t_2-t_1)} - e^{-\lambda_1(t_3-t_1)})$$

$$N_{20} = \frac{S(t_2, t_3)}{k_2(e^{-\lambda_2(t_2-t_1)} - e^{-\lambda_2(t_3-t_1)})} + \frac{N_{10}\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} - \frac{N_{10}\lambda_2}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot \frac{(e^{-\lambda_1(t_2-t_1)} - e^{-\lambda_1(t_3-t_1)})}{(e^{-\lambda_2(t_2-t_1)} - e^{-\lambda_2(t_3-t_1)})}$$

Первый член этой функции отвечает за распад ядра 2 без накопления. Оставшиеся два члена учитывают накопление ядер 2.

При расчете количества ядер нужно быть очень аккуратным, так как на результат влияет очень много параметров, в каждом из которых заложены свои ошибки.

Профитировав этой функцией данные из спектров мы получим значение N_{20} , причем все остальные параметры считаются известными.

Далее определим выход реакции с образованием ядра 2.

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 + y_2$$

$$N_2(t_1) = e^{-\lambda_2 t_1} \left(\int_0^{t_1} (\lambda_1 N_1(t) + y_2) e^{\lambda_2 t} dt + C_2 \right) = N_{20}$$

С помощью специального математического программного обеспечения можно численно решить этот интеграл относительно y_2 .

$$N_1(t) = N_{10} \frac{(1 - e^{\lambda_1 t_1})}{(1 - e^{\lambda_1 t})} - \text{изменение количества ядер 1 во время облучения.}$$

$$N_2(0) = 0 \implies C_2 = 0$$

$$N_2(t_1) = e^{-\lambda_2 t_1} \int_0^{t_1} \left(\lambda_1 N_{10} \frac{(1 - e^{-\lambda_1 t})}{(1 - e^{-\lambda_1 t_1})} + y_2 \right) e^{\lambda_2 t} dt = N_{20} =$$

$$N_{20} = e^{-\lambda_2 t_1} \left(\frac{\lambda_1 N_{10}}{1 - e^{-\lambda_1 t_1}} \cdot \int_0^{t_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) e^{\lambda_2 t} dt + \int_0^{t_1} y_2 e^{\lambda_2 t} dt \right)$$

$$= e^{-\lambda_2 t_1} \frac{\lambda_1 N_{10}}{1 - e^{-\lambda_1 t_1}} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 t_1} - 1) - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1) t_1} - 1) \right) + \frac{y_2 \cdot (1 - e^{\lambda_2 t_1})}{-\lambda_2} =$$

$$= y_1 \cdot \frac{\lambda_2 (1 - e^{-\lambda_1 t_1}) - \lambda_1 (1 - e^{-\lambda_1 t_2})}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{y_2 \cdot (1 - e^{-\lambda_2 t_1})}{\lambda_2} = N_{20}$$

$$y_2 = \frac{\lambda_2 N_{20}}{1 - e^{-\lambda_2 t_1}} - y_1 \frac{\lambda_2 (1 - e^{-\lambda_1 t_1}) - \lambda_1 (1 - e^{-\lambda_2 t_1})}{(\lambda_2 - \lambda_1) (1 - e^{-\lambda_2 t_1})}$$

Таким образом мы можем посчитать выход ядра 2, если знаем выход ядра 1. Но если мы ничего не знаем о выходе ядра 1 (или примем $y_1 = 0$), то мы получим формулу для выхода с одним каналом образования ядра.