

Определение выходов для реакции фотоделения.

Предварительные замечания.

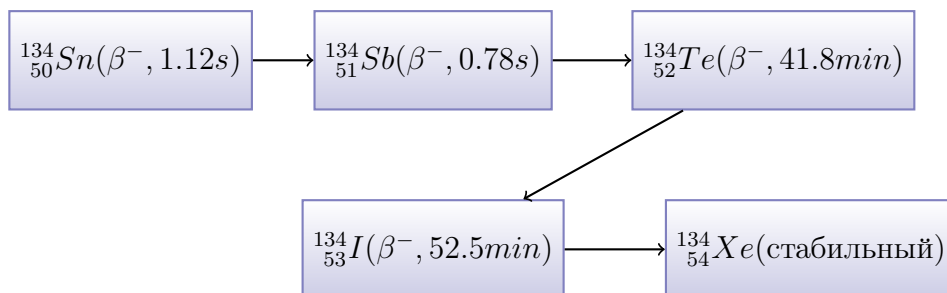
Прежде чем приступить к расчету выходов, нужно понять, каким образом может получиться ядро.

На сайте Лундского университета можно найти таблицы изобар (ядер с одинаковым массовым числом и разным количеством протонов). Ссылка <http://ie.lbl.gov/toi/sumframe.htm>

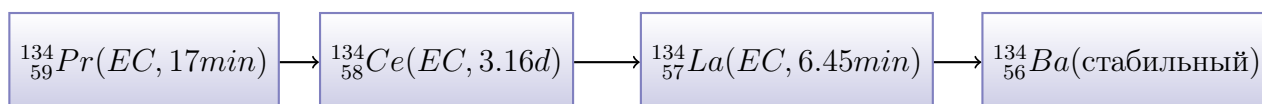
Можно выбрать массовое число. Например $A = 134$. (файл 134.pdf)

Цепочки выглядят следующим образом:

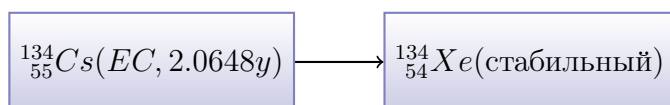
- Цепочка β^- распадов:



- Цепочка для e^- - захвата:



- Еще одна цепочка для e^- - захвата:



Проанализируем способ получения различных ядер при делении.



Это ядро может получиться несколькими способами.

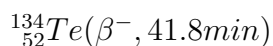
- Непосредственно при делении урана.

- Это ядро может получиться при β^- распаде ${}^{134}_{53}\text{I}(\beta^-, 52.5\text{min})$ и всей цепочки β^- распада родительских ядер. Причем родительские ядра получают непосредственно при делении урана.

- Аналогично ядро ${}^{134}_{54}\text{Xe}$ может получиться в результате e^- - захвата в ядре ${}^{134}_{55}\text{Cs}(EC, 2.0648y)$.

Причем само ядро ${}^{134}_{55}\text{Cs}$ образуется при делении урана.

Ядро ксенона в нашем эксперименте может быть получено тремя разными способами. Естественно гамма линии в спектре от этого ядра не увидим, так как оно стабильно. Оно приведено в качестве примера.



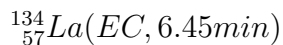
${}^{134}_{52}\text{Te}$ может быть получен двумя способами:

- Непосредственно при делении урана.

- Это ядро может получиться при β^- распаде ${}^{134}_{51}\text{Sb}(\beta^-, 0.78s)$ и всей предыдущей цепочки β^- распада родительских ядер. Причем родительские ядра получают непосредственно при делении урана.

Период полураспада $^{134}_{51}\text{Sb}$ меньше секунды - очень короткий (и всех остальных родительских ядер тоже), поэтому анализируя спектры мы не увидим накопления ядра теллура после облучения. Анализ расчета выхода этого изотопа будет рассмотрен ниже.

В условиях нашего эксперимента мы не сможем определить какая доля ядер теллура образуется непосредственно в результате деления, а какая часть в результате β^- распадов родительских ядер изобар. Выход который мы будем считать будет накопленным (то есть выход, включающий в себя все способы получения ядра).

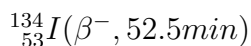


Интересно рассмотреть образование ядра $^{134}_{57}\text{La}$. Оно может получиться двумя способами.

- Непосредственно при делении урана.

- $^{134}_{57}\text{La}(EC, 6.45\text{min})$ может образоваться в результате e^- - захвата в ядре $^{134}_{58}\text{Ce}(EC, 3.16\text{d})$.
Причем само ядро $^{134}_{58}\text{Ce}$ при делении урана.

Мы не увидим накопления этого ядра после выключения ускорителя. Но уже по другой причине. Накопление ядра $^{134}_{57}\text{La}$ из за распада $^{134}_{58}\text{Ce}$ будет мало, так как период полураспада ядра $^{134}_{58}\text{Ce}$ очень большой по сравнению с периодом распада ядра $^{134}_{57}\text{La}$. Выход же который мы будем определять, будет независимым (отвечающий только делению ядра урана).



Последним рассмотрим ядро $^{134}_{53}\text{I}(\beta^-, 52.5\text{min})$. Оно может получиться двумя способами.

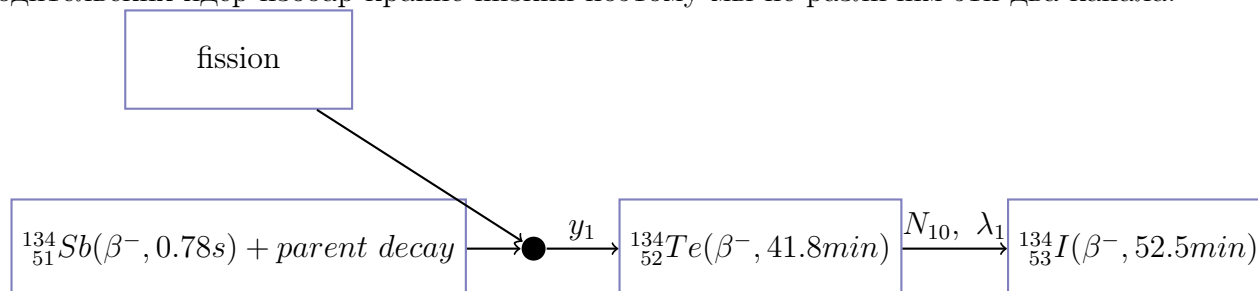
- Непосредственно при делении урана.

- Это ядро может получиться при β^- распаде ядра $^{134}_{52}\text{Te}(\beta^-, 41.8\text{min})$ и других родительских ядер. Родительские ядра получают непосредственно при делении урана. Но нас будет интересовать только образование йода из теллура, так как период полураспада других родительских ядер очень короткий. В этом случае также можно определить независимый выход образования йода. Но для этого нужно знать накопленный выход получения ядра теллура, а точнее количество ядер теллура на момент окончания облучения засчет любых процессов.

Итак видно, что в процессе деления радиоактивные ядра могут получаться множеством способов. От того как образуется ядро зависит та информация, которую мы сможем получить о реакции. В одних случаях мы можем рассчитать независимый выход образования ядра только в результате деления, в других только накопленный (и таких случаев больше). В зависимости от способа образования ядра будут меняться формулы для расчета выходов реакций и формулы для определения периодов изотопов.

Определение выходов. Один канал образования ядра ($^{134}_{52}\text{Te}$).

Выше было показано, что ядро теллура может быть получено как в результате деления, так и в результате распада на него родительских ядер. Однако период полураспада родительских ядер изобар крайне низкий поэтому мы не различим эти два канала.



В этом случае уравнение изменения количества радиоактивных ядер во время и после облучения будет иметь вид:

$$\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1 + y_1$$

Здесь y_1 - накопленный выход ядер $^{134}_{52}\text{Te}$.

Аналогичное уравнение мы получили при анализе реакции $^{238}_{92}\text{U}(\gamma, n)^{237}_{92}\text{U}$. Поэтому без выкладок можно сразу написать решения:

Формула изменения количества радиоактивных ядер после облучения (для оценки периода полураспада): $N = N_0 \cdot e^{-\frac{\ln 2 \cdot t_2}{T_{1/2}}}$
Формула для определения количества ядер на момент окончания облучения (напомним, что этой функцией нужно профитировать кривую распада для получения N_{10}) $N_{10} = \frac{S}{k_1(e^{-\lambda_1 t_2} - e^{-\lambda_1 t_3})}$
Зная N_{10} мы можем определить выход реакции: $y_1 = \frac{N_{10} \cdot \lambda_1}{(1 - e^{-\lambda_1 t_1})}$

В качестве примера использования этих формул рассмотрим определение выхода для ядра $^{134}_{52}\text{Te}$.

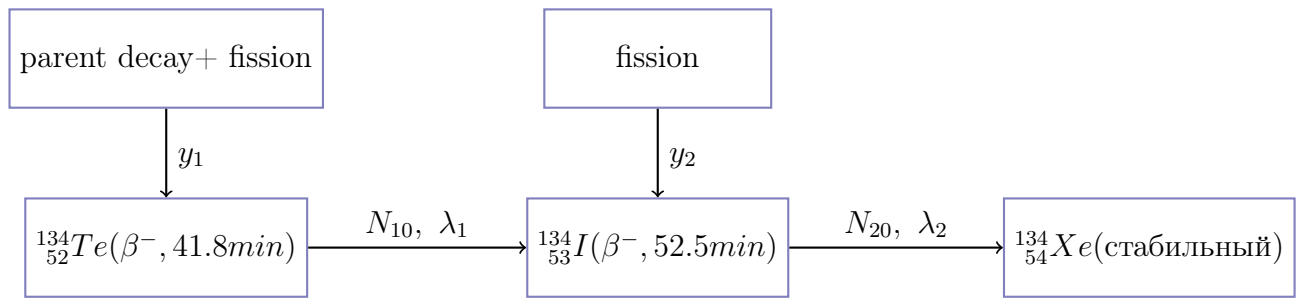
Ядро $^{134}_{52}\text{Te}$ β^- радиоактивно с периодом полураспада 41.8 минут. $^{134}_{52}\text{Te}$ распадается на ядро $^{134}_{53}\text{I}$ в возбужденном состоянии. По гамма переходам в йоде мы сможем определить наличие ядра теллура в спектре. При распаде $^{134}_{52}\text{Te}$ испускается несколько высокоинтенсивных гамма - квантов (таблица 5.). Наличие в спектре всех этих линий с соответствующей интенсивностью подтверждает, что образовался именно $^{134}_{52}\text{Te}$. Также необходимо, чтобы период полураспада по этим линиям совпадал с табличным. Существует еще несколько критериев для точной идентификации пиков в спектре остаточной активности, они будут приведены в соответствующем разделе.

Gammas from 134 Te (41.8 min)			
Eg, keV	Ig, %	Err Ig, %	Decay mode
79.445	20.9	0.6	b-
180.891	18.3	0.6	b-
210.465	22.7	1.2	b-
277.951	21.2	0.9	b-
435.06	18.9	0.9	b-
742.586	15.3	0.6	b-
767.20	29.5	1.2	b-

Таблица 5. Гамма - кванты при распаде $^{134}_{52}\text{Te}$.

Рассмотрим эволюцию пика $E_\gamma = 277.951\text{кэВ}$...

Определение выхода реакции. Два канала образования ядра ($^{134}_{53}I$)



Случай, когда можно разделить сколько ядер образовалось в результате деления, а сколько в результате распада на него родительских ядер.

$$\begin{cases} \frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 N_1 + y_1 \\ \frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 + y_2 \end{cases}$$

λ_1, λ_2 - постоянные распада,

y_1 , - накопленный выход образования ядра 1 ($^{134}_{52}Te$),

y_2 , - независимый выход образования ядра 2 ($^{134}_{53}I$) в результате деления,

N_{10}, N_{20} количество ядер 1 и 2 на момент окончания облучения.

Способ решения такого вида уравнений описан в статье, доступной по ссылке

<http://depni.sinp.msu.ru/hatta/metodika.pdf>.

Нужно записать уравнение в виде:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + f(t)$$

Тогда решение будет записано в виде:

$$N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \left(\int f(t) e^{\lambda_2 \tau} d\tau + C_2 \right)$$

Первое уравнение решено в предыдущем разделе, поэтому его решение мы приводить не будем.

Как и в случае для одного канала образования ядра разобьем эксперимент на несколько временных промежутков. В промежутке времени $0 - t_1$ происходит накопление и распад изотопов (облучение). При $t > t_1$ образец переносится на детектор и происходит измерение спектров. В промежутке $t_2 - t_3$ - происходит измерение спектров, с целью получить выход.

Измерение спектров происходит в промежутке времени $t > t_1$. Для простоты будем считать что $t_1 = 0$. Для этого случая уравнение изменения количества радиоактивных ядер примет вид:

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1$$

$$N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \left(\int_0^t f(t) e^{\lambda_2 \tau} d\tau + C_2 \right) = e^{-\lambda_2 t} \left(\int_0^t \lambda_1 N_{10} e^{(\lambda_2 - \lambda_1)\tau} d\tau + C_2 \right) =$$

$$N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \cdot C_2 + e^{-\lambda_2 t} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \cdot (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - 1) =$$

$$= e^{-\lambda_2 t} \cdot C_2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_1 t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} e^{-\lambda_2 t}$$

$N_2(0) = N_{20} \implies C_2 = N_{20}$. Окончательно для изменения числа радиоактивных ядер 2 после облучения получим формулу, с помощью которой можно сразу оценить период полураспада этого ядра:

$$N_2(t) = e^{-\lambda_2 t} \left(N_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10} \right) + e^{-\lambda_1 t} \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} N_{10}$$

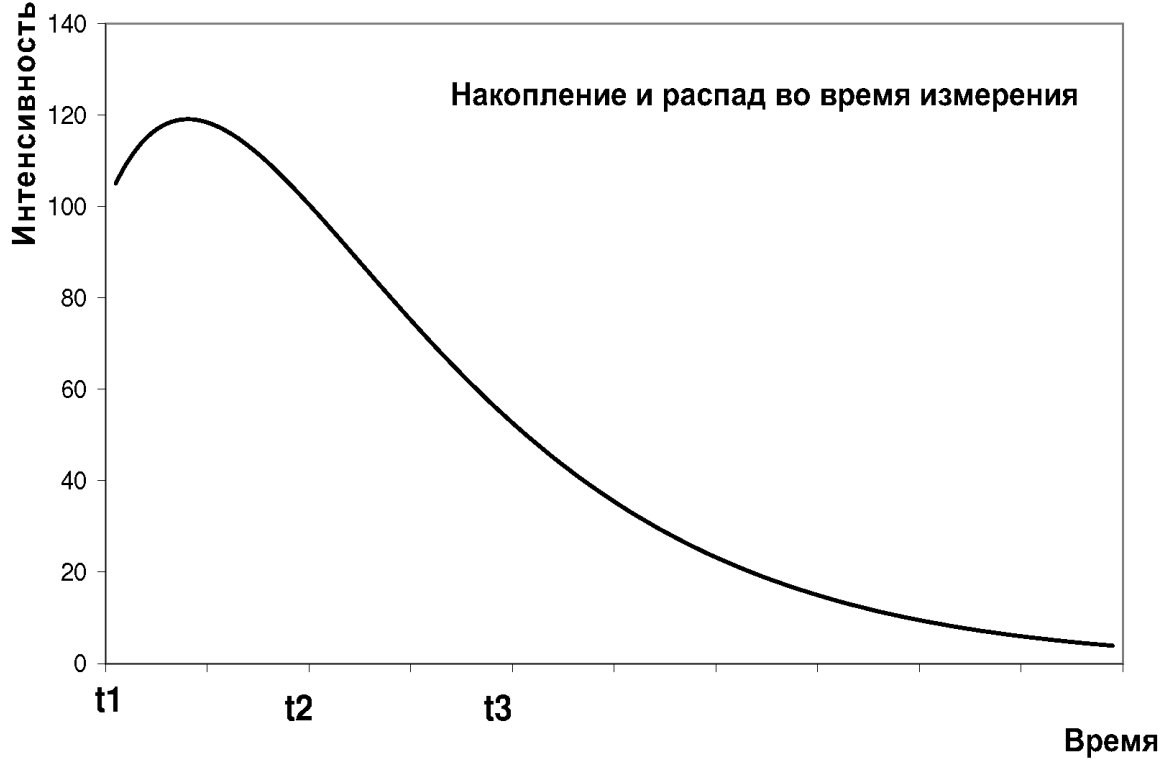


Рисунок 1. Изменение количества радиоактивных ядер в после облучения для случая двух каналов образования ядра.

Мы измеряем площадь пиков, то есть число распавшихся радиоактивных ядер за время от t_2 до t_3 . Вернемся к старым обозначениям. Здесь t_2 и t_3 время от начала облучения.

$$S(t_2, t_3) = k_2 \int_{t_2}^{t_3} \lambda_2 N_2(t) dt = k_2 \lambda_2 \int_{t_2}^{t_3} \left(e^{-\lambda_2 t} N_{20} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_2 t} N_{10} + \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} e^{-\lambda_1 t} N_{10} \right) dt =$$

$$\begin{aligned} \frac{S(t_2, t_3)}{k_2} &= N_{20}(e^{-\lambda_2 t_2} - e^{-\lambda_2 t_3}) + \frac{N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1}(e^{-\lambda_2 t_2} - e^{-\lambda_2 t_3}) - \frac{N_{10} \lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}(e^{-\lambda_1 t_2} - e^{-\lambda_1 t_3}) = \\ &= \left(N_{20} - \frac{N_{10}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right) (e^{-\lambda_2 t_2} - e^{-\lambda_2 t_3}) - \frac{N_{10} \lambda_2}{\lambda_1(\lambda_2 - \lambda_1)}(e^{-\lambda_1 t_2} - e^{-\lambda_1 t_3}) \end{aligned}$$

Профитировав этой функцией данные из спектров мы получим значение N_{20} , причем все остальные параметры считаются известными.

Далее определим выход реакции с образованием ядра 2.

$$\frac{dN_2}{dt} = -\lambda_2 N_2 + \lambda_1 N_1 + y_2$$

$$N_2(t_1) = e^{-\lambda_2 t_1} \left(\int_0^{t_1} (\lambda_1 N_1(t) + y_2) e^{\lambda_2 t} dt + C_2 \right) = N_{20}$$

С помощью специального математического программного обеспечения можно численно решить этот интеграл относительно y_2 .

$$N_1(t) = N_{10} \frac{(1 - e^{\lambda_1 t_1})}{(1 - e^{\lambda_1 t})} - \text{изменение количества ядер 1 во время облучения.}$$

$$N_2(0) = 0 \implies C_2 = 0$$

$$N_2(t_1) = e^{-\lambda_2 t_1} \int_0^{t_1} \left(\lambda_1 N_{10} \frac{(1 - e^{-\lambda_1 t})}{(1 - e^{-\lambda_1 t_1})} + y_2 \right) e^{\lambda_2 t} dt = N_{20} =$$

$$N_{20} = e^{-\lambda_2 t_1} \left(\frac{\lambda_1 N_{10}}{1 - e^{-\lambda_1 t_1}} \cdot \int_0^{t_1} (1 - e^{-\lambda_1 t}) e^{\lambda_2 t} dt + \int_0^{t_1} y_2 e^{\lambda_2 t} dt \right)$$

$$= e^{-\lambda_2 t_1} \frac{\lambda_1 N_{10}}{1 - e^{-\lambda_1 t_1}} \cdot \left(\frac{1}{\lambda_2} (e^{\lambda_2 t_1} - 1) - \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} (e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t_1} - 1) \right) + \frac{y_2 \cdot (1 - e^{\lambda_2 t_1})}{-\lambda_2} =$$

$$= y_1 \cdot \frac{\lambda_2 (1 - e^{-\lambda_1 t_1}) - \lambda_1 (1 - e^{-\lambda_1 t_2})}{\lambda_2 (\lambda_2 - \lambda_1)} + \frac{y_2 \cdot (1 - e^{-\lambda_2 t_1})}{\lambda_2} = N_{20}$$

$$y_2 = \frac{\lambda_2 N_{20}}{1 - e^{-\lambda_2 t_1}} - y_1 \frac{\lambda_2 (1 - e^{-\lambda_1 t_1}) - \lambda_1 (1 - e^{-\lambda_2 t_1})}{(\lambda_2 - \lambda_1)(1 - e^{-\lambda_2 t_1})}$$

Таким образом мы можем посчитать независимый выход ядра 2, если знаем выход ядра 1. Но если мы ничего не знаем о выходе ядра 1 (или примем $y_1 = 0$), то мы получим формулу для выхода с одним каналом образования ядра. Тогда посчитанный выход будет накопленным.